Polya und die großen Zahlen

Zunächst ein paar Gedanken über das Unendliche:

Jeder weiß, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt: 1,2,3,4 … usw.. Eine größte Zahl gibt es nicht. Man könnte immer noch eins dazuzählen. Eine solche Menge, die nicht abzählbar ist, nennt man Unendlich.

Denken wir uns aber nur die Menge der geraden oder ungeraden Zahlen, so ist deren Menge ebenfalls nicht abzählbar. Allerdings kann die Menge der geraden bzw. ungeraden natürlichen Zahlen nur halb so groß sein, wie die Menge aller natürlichen Zahlen. Sie ist aber ebenfalls unendlich groß.

Betrachten wir nun die Menge aller ganzen Zahlen, also die positiven und die negativen ganzen Zahlen, so ist deren Menge ebenfalls unendlich groß. Aber eben doppelt so groß, wie die der natürlichen Zahlen.

Noch größer wird die Menge der Unendlichkeit, wenn alle rationalen Zahlen betrachtet werden, also alle Zahlen, die sich durch einen Bruch bzw. eine endliche oder periodische Dezimalzahl darstellen lassen. Schon die Menge aller rationalen Zahlen zwischen zwei ganzen Zahlen, wie z.B. 1 und 2 ist unendlich groß.

Man sieht also, dass es verschiedene Unendlichkeiten gibt, die eine unterschiedliche Größe haben müssen.

Wenn man sogenannte irrationale Zahlen betrachtet, so haben diese eine unendliche Zahl von Nachkommastellen, die sich nicht in ihrer Abfolge wiederholen. Die bekannteste solche Zahl ist die Zahl pi. Pi ist etwa 3,14159265….

In der Unendlichkeit der Nachkommastellen findet man alle Zahlen, die unsere Welt beschreiben. So ist das Geburtsdatum eines jeden Menschen irgendwo als Ziffernfolge zu finden, jede Telefonnummer, jede Kontonummer und auch jeder Geheimcode, sei er auch noch so lang.

Noch verrückter wird es, wenn wir die Dimensionen des Weltalls betrachten. Wenn wir annehmen, dass die Ausdehnung des Weltalls unendlich groß ist, dann gibt es auch unendlich viele Galaxien und noch mehr unendlich viele Sterne. Wenn nun die Wahrscheinlichkeit, dass es innerhalb eines Sternensystems Leben gibt, nur bei 0,000001 liegt, dann muss es dennoch unendlich viele bewohnte Systeme geben. Auch wenn unter denen die Wahrscheinlicht für ein ähnliches Leben, wie auf der Erde verschwindend gering ist, so muss es auch davon eine unendlich große Zahl geben. Und dann müssen wir auch annehmen, dass es viele Systeme gibt, die eine Kopie der Erde enthalten, sogar, dass wir parallel auch auf vielen anderen Erden existieren.

Mit Fragen der Unendlichkeit befasst sich auch der ungarische Mathematiker **George Pólya**

George (György) Pólya war ein Mathematiker ungarischer Herkunft und ist bis heute einer der wichtigsten Vertreter seines Faches. Er wurde am 13. Dezember 1887 in Budapest geboren, was damals zu Österreich-Ungarn gehörte.

Pólya studierte zunächst Sprachen und Literatur, bevor er sich der Physik und der Mathematik zuwandte. Nach dem Abschluss lehrte er in Wien, Göttingen und Zürich, wo er ab 1928 als ordentlicher Professor forschte. Ab 1940 lebte er in den USA, wo er von 1942 und 1953 an der Stanford University lehrte. Auch nach seiner Emeritierung blieb er in den USA, wo er 1985 im Alter von 97 Jahren starb.

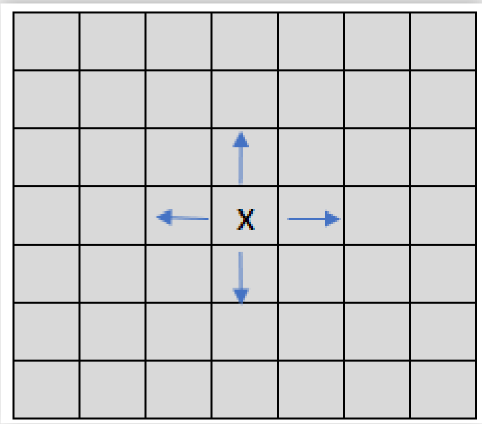
Während seines langen Lebens war sein Schaffen war geprägt von der Vermittlung und Charakterisierung von Strategien der Problemlösungen. Er veröffentlichte mehrere Schriften, die mittlerweile zum Standardwerk der Mathematik gehören. Das bekannteste Werk ist die Reihe: "Vom Lösen mathematischer Probleme".

Random Walk – Irrfahrten im n-dimensionalen Raum

Ein bekanntes Phänomen seiner Forschung befasst sich mit einem Käfer der irgendwo auf einem riesigen Schachbrett mit unendlich vielen Feldern ausgesetzt wird und sich durch Zufallsbewegungen jeweils ein Feld noch oben, unten, links oder rechts bewegt. Die Frage ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er irgendwann wieder auf seinem Ausgangsfeld ankommt?

Bestenfalls kann er schon beim zweiten Schritt wieder auf seinem Ausgangsfeld landen. Die Wahrscheinlichkeit dafür liegt bei 25 %.

Nehmen wir an, er ist mit dem ersten Schritt nach rechts gegangen, so gibt es für den zweiten Schritt vier Möglichkeiten. Eine davon bringt ihn wieder auf sein Ausgangsfeld.



Hat der Käfer bereits vier Schritte gemacht, ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mit vier Schritten wieder zurückkehrt schon deutlich geringer und liegt nur noch bei ca. 14 %. Je weiter er sich bei seiner Zufallswanderung vom Startfeld entfernt hat, umso geringer wird die Wahrscheinlichkeit mit der gleichen Schrittzahl wieder zurückzukehren.

Dennoch konnte Polya nachweisen, dass der Käfer auch wenn er noch so weit vom Ausgangsfeld entfernt ist, er mit der Wahrscheinlichkeit von 100 % irgendwann nach sehr, sehr vielen Schritten zufällig wieder auf das Startfeld zurückkehrt.

Den beschriebene Käferspaziergang im zweidimensionalen Raum mit 4 Richtungen habe ich 10 mal mit einem Computerprogramm simuliert. Wobei das Programm beendet wurde, wenn das Ausgangsfeld wieder erreicht war.

Versuch	Anzahl der Schritte	Größte Abweichung nach links	Größte Abweichung nach rechts	Größte Abweichung nach oben	Größte Abweichung nach unten
1	5 750	6	61	46	10
2	14 138 886	202	2210	223	51
3	268 720	430	51	133	241
4	2	0	0	0	1
5	2	0	0	1	0
6	28	1	2	0	5
7	Nicht messbar				
8	68 558	45	151	4	212
9	2	1	0	0	0
10	182	6	0	9	2

Man erkennt, dass dreimal das Startfeld schon wieder nach dem zweiten Schritt erreicht wurde. Wie erwähnt, liegt die Wahrscheinlichkeit dafür bei 25 %.

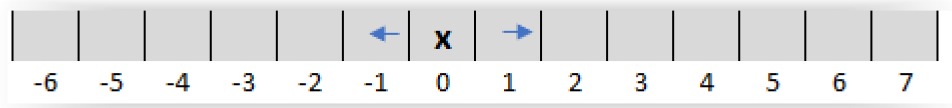
Bei den anderen Versuchen hat es eine Weile gedauert, bis das Startfeld wieder erreicht wurde. Dabei hatte sich der Käfer unterschiedlich weit davon entfernt. In einem Fall konnte der Computer die Zahl der nötigen Schritte nicht berechnen, da die Zahl zu groß für den verwendeten Zahlenbereich wurde. Das müssen weit über eine Milliarde Schritte gewesen sein.

Ein entscheidendes Merkmal von Random Walks ist ihre stochastische Natur, d.h. jeder Schritt hängt nur von der aktuellen Position und nicht von den vorherigen Schritten ab. Das macht sie zu einer Art **Markov-Prozess** - ein mathematisches Konzept, bei dem der zukünftige Zustand nur vom aktuellen Zustand abhängt und nicht von der Abfolge der Ereignisse, die ihm vorausgegangen sind. Diese "gedächtnislose" Bewegung, kombiniert mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die mögliche Positionen beschreiben, bietet eine solide mathematische Grundlage für das Verständnis von Random Walks.

Wir können einen Random Walk anhand statistischer Eigenschaften analysieren, um sein Verhalten im Laufe der Zeit zu verstehen. Dabei werden Aspekte wie die erwartete Entfernung vom Startpunkt, die Wahrscheinlichkeitsverteilung möglicher Positionen und die Wahrscheinlichkeit der Rückkehr zum Ursprung untersucht. Diese Analysen helfen uns, Zufälligkeit und Vorhersehbarkeit zu quantifizieren, Muster zu erkennen und Vorhersagen zu treffen.

A. Irrfahrt im 1- dimensionalen Raum

Betrachten wir zunächst einen Random-Walk im eindimensionalen Raum. Dazu kann man sich eine unendlich lange Straße vorstellen, auf der es nur die Möglichkeit gibt, nach links oder nach rechts zu gehen. Ein Akteur bewegt sich von einem beliebigen Punkt aus, jeweils einen Schritt nach links oder nach rechts. Die Wahrscheinlichkeit, welche Richtung er wählt, kann unterschiedlich sein, wir gehen aber immer davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für jede Richtung gleich ist, also 50 % oder p = 0,5.



Anzahl von Schritten wieder auf sein Startfeld zurückkehrt.

<u>Ein paar Definitionen vorab:</u>

d: Anzahl der Dimensionen. Wenn der Weg nur entlang einer Straße folgt, ist d = 1, wenn es in alle vier Himmelsrichtungen geht, ist d = 2, wenn der Weg sich im Raum bewegt, ist d = 3 usw.

Start: Ist der Ausgangspunkt, an dem der Walk beginnt. Wird im Koordinatensystem mit 0 bezeichnet.

Weg: oder auch Walk, ein Weg, der ab Start beginnt und n Schritte umfasst.

n: Gesamtzahl aller getätigten Schritte eines Walks. Dies muss eine gerade Zahl sein (also 2i), da man stets die gleiche Anzahl Schritte in jede mögliche Richtung benötigt, um wieder am Ausgangspunkt anzulangen.

P: Wahrscheinlichkeit für einen Schritt in eine Richtung. Bei den einfachen Modellen, sind alle Richtungen gleichwahrscheinlich. D.h. im 1-dimensionalen Raum gibt es die Möglichkeiten links und rechts mit jeweils 50 % iger Wahrscheinlichkeit oder p = 0,5.
Im zweidimensionalen Raum gibt es 4 Richtungen mit p = 0,25 usw.

Gesamtzahl der Wege: Anzahl der möglichen Wege, die mit n Schritten absolviert werden können. Bei 2 Schritten und d = 1 sind das 4 Wege LL, LR, RL und RR. Bei vier Schritten sind es 16 Wege usw.
Die Gesamtzahl der Wege kann mit der Formel m^n berechnet werden, wobei m die Zahl der Möglichkeiten mit einem Schritt ist.
Bei 4 Schritten im 1-dimensionalen Raum sind das $2^4 = 16$, bei 6 Schritten $2^6 = 64$ usw. Im zweidimensionalen Raum dann 4^n.

Wege nach Hause: Die Anzahl der möglichen Wege, die wieder zum Start zurückführen. Bei d = 1 und n = 2, führen 2 von 4 Wegen wieder zum Start zurück. LR und RL

Die Anzahl der Wege nach Hause ist **binomialverteilt** und kann bei d = 1 mit folgender Formel berechnet werden:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Wobei k dann immer n/2 ist, weil die Anzahl der Schritte in beide Richtungen gleich groß ist. Bsp.: n = 6 $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$ 20 von 64 Wegen führen zum Start.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Weg von n Schritten, der auf einem bestimmten Punkt ankommt ergibt sich dann aus der Wahrscheinlichkeit für einen Weg multipliziert mit der Anzahl der Wege, die zu diesem Punkt führen. Dabei kann m die Anzahl der Schritte nach rechts bezeichnen und n – m die Anzahl der Schritte nach links. Bei unserer Betrachtung soll die Anzahl der Schritte nach links und rechts gleich groß sein.

$\left(\frac{1}{2}\right)^n x \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Anteil: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Weg von n Schritten zum Start zurückführt. Dadurch wird die Anzahl der Wege nach Hause durch die Gesamtzahl der Wege dividiert.
Bei 2n = 6 ist das 20/64 = 0,3125. Dies kann auch durch die folgende Formel berechnet werden. $P(zurück\ auf\ 0) = \frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}.}$ abgleitet aus $\left(\frac{1}{2}\right)^n x \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Um wieder auf das Startfeld 0 zurückzukehren, müssen genauso viele Schritte nach rechts wie nach links ausgeführt werden. D. h. die Anzahl der Schritte muss auf jeden Fall eine gerade Zahl sein. Die die Gesamtzahl der Schritte wird mit **n** bezeichnet.

Bei einer Gesamtzahl von 2 Schritten gibt es vier Möglichkeiten:

Von 0 nach 1 und dann nach 2 oder von 0 nach 1 und wieder nach 0 zurück. Das Gleiche gilt für die andere Richtung. Also insgesamt 4 mögliche Wege, von denen 2 wieder zum Ausgangsfeld zurückführen.

Aber! Man kann nicht einfach die Wahrscheinlichkeiten addieren, um auf die Rückkehr-wahrscheinlichkeit zu kommen. Dieses ergäbe ja einen Wert größer als 1. Man muss zusätzlich noch die Wahrscheinlichkeit kennen, dass überhaupt 2n Schritte durchgeführt werden. D. h. 4 Schritte kann es nur geben, wenn nicht schon nach 2 Schritten der Ausgangspunkt wieder erreicht wird.

Zur Veranschaulichung beobachten wir eine große Anzahl Menschen, die sich auf einen Random-Walk macht. Gehen wir mal von 10 000 Menschen aus, damit nicht schon nach wenigen Runden einzelne Gliedmaßen unterwegs sind (man erhält sehr schnell Werte, die nicht ganzzahlig sind) Dies veranschaulicht folgende Tabelle

Random-Walk im eindimensionalen Raum p = 0,5

n	Anfangswert	Wege gesamt	Wege nach Hause	Anteil	zu Hause ange-kommen	noch nicht ange-kommen	Ankommens-wahrschein-lichkeit ges.
2	10.000	4	2	0,5	5.000	5.000	0,5
4	5.000	16	6	0,375	1.875	3.125	0,68750000
6	3.125	64	20	0,3125	977	2.148	0,78515625
8	2.148	256	70	0,2734375	587	1.561	0,84390259
10	1.561	1.024	252	0,24609375	384	1.177	0,88231719
12	1.177	4.096	924	0,22558594	265	911	0,90886477
14	911	16.384	3.432	0,20947266	191	720	0,92795511
16	720	65.536	12.870	0,19638062	141	579	0,94210333
18	579	262.144	48.620	0,18547058	107	472	0,95284146
20	472	1.048.576	184.756	0,17619705	83	388	0,96115066
22	388	4.194.304	705.432	0,1681881	65	323	0,96768465
24	323	16.777.216	2.704.156	0,16118026	52	271	0,97289325
26	271	67.108.864	10.400.600	0,15498102	42	229	0,97709428
28	229	268.435.456	40.116.600	0,14944598	34	195	0,98051745
30	195	1.073.741.824	155.117.520	0,14446445	28	167	0,98333198
32	167	4.294.967.296	601.080.390	0,13994993	23	143	0,98566467
34	143	17.179.869.184	2.333.606.220	0,13583376	19	124	0,98761189
36	124	68.719.476.736	9.075.135.300	0,1320606	16	108	0,98924787
38	108	274.877.906.944	35.345.263.800	0,12858532	14	94	0,99063044
40	94	1.099.511.627.776	137.846.528.820	0,12537069	12	82	0,99180511

Jede einzelne Möglichkeit (= Weg) hat die Wahrscheinlichkeit = 0,5 x 0,5 = 0,25. Da zwei davon zurück führen, ist die Wahrscheinlichkeit für die Rückkehr = 0,25 x 2 = 0,5. Damit sind 5000 Personen zurück, und 5000 Personen noch nicht. Für diese 5000 Personen gibt es bei 4 Schritten insgesamt 16 mögliche Wege, von denen 6 wieder zum Ausgangspunkt führen. Bei einem Weg von 20 Schritten sind beispielsweise 83 wieder auf dem Startfeld gelandet. Allerdings sind vorher bei kürzeren Wegen auch schon 9529 wieder beim Start angekommen, sodass noch 388 noch nicht wieder zurückgefunden haben. Insgesamt sind bis dahin 96,11 % wieder zurückgekehrt.

Die letzte Spalte zeigt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass man nach insgesamt n – Schritten wieder auf dem Ausgangsfeld angekommen ist. Man sieht, dass diese für n -> ∞ gegen 1 konvergiert. Damit ist sichergestellt, dass irgendwann alle wieder zu Hause angekommen sind. Man spricht in diesem Fall von einer **rekurrenten** Irrfahrt.

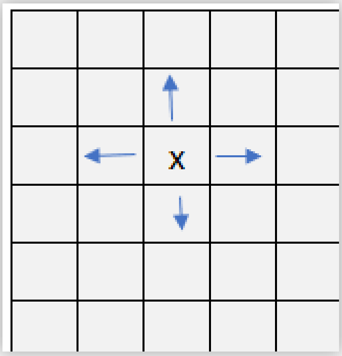
Die Werte der letzten Spalte werden rekursiv berechnet. Dabei muss der für n-Schritte sich jeweils ergebende Anteil der sich mit dem sich im letzten Schritt ergebenden Anteil der noch nicht zurückgekehrten multipliziert werden. Diese Werte werden dann alle aufaddiert.

Bsp.: für n = 10 ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit für die Rückkehr von 0,24609375. Diese muss mit dem Anteil der bis dahin noch nicht zurückgehrten multipliziert werden. Das sind 1561 von 10 000 also ein Anteil von 0,1561. Das ergibt den tatsächlichen Anteil der in dieser Stufe Zurückgekehrten von 0,038406… Addiert man diesen Wert zum vorhergehenden der letzten Spalte erhält man den Anteil von 0,88231.. der 10 000 Personen, die insgesamt nach 10 Schritten wieder auf dem Startfeld sind. Wie man erkennen kann, tendiert dieser Wert mit höheren Schrittzahlen gegen 1.

Der Ausdruck $\left(\frac{1}{2}\right)^n x \frac{n!}{k!(n-k)!}$ kann näherungsweise durch $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ berechnet werden.

B. Irrfahrt im 2- dimensionalen Raum

Einen 2-dimensionalen Raum kann man sich wie ein Schachbrett oder ein Koordinatenkreuz mit x- und y-Achse vorstellen. Es gibt vier mögliche Richtungen: links, rechts, oben und unten. Jeder Schritt hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich 0,25.



Für einen Weg von 2 Schritten gibt folgende Kombinatioen:
(L = links, R = rechts, O = oben, U = unten)

LL, LR, LO, LU
RR, RL, RO, RU
OO, OU, OL, OR
UU, UO, UL, UR

16 Mögliche Wege, von denen 4 wieder zum Start führen.
LR, RL, OU, UO.

Zur Veranschaulichung wieder eine Tabelle, für 10 000 Personen, die sich auf einem Random-Walk in einem zweidimensionalen Terrain machen.

Random-Walk im zweidimensionalen Raum p = 0,25

n	Anfangswert	Wege gesamt	Wege nach Hause	Anteil	zu Hause ange-kommen	noch nicht ange-kommen	Ankommens-wahrschein-lichkeit ges.
2	10.000	16	4	0,25	2.500	7.500	0,250000000
4	7.500	256	36	0,140625	1.055	6.445	0,35546875
6	6.445	4.096	400	0,09765625	629	5.816	0,41841125
8	5.816	65.536	4.900	0,07476807	435	5.381	0,46189552
10	5.381	1.048.576	63.504	0,06056213	326	5.055	0,49448428
12	5.055	16.777.216	853.776	0,05088902	257	4.798	0,52020947
14	4.798	268.435.456	11.778.624	0,04387879	211	4.587	0,54126210
16	4.587	4.294.967.296	165.636.900	0,03856535	177	4.410	0,55895349
18	4.410	68.719.476.736	2.363.904.400	0,03439934	152	4.259	0,57412520
20	4.259	1.099.511.627.776	34.134.779.536	0,0310454	132	4.127	0,58734665
22	4.127	17.592.186.044.416	497.634.306.624	0,02828724	117	4.010	0,59901947
24	4.010	281.474.976.710.656	7.312.459.672.336	0,02597908	104	3.906	0,60943658
26	3.906	4.503.599.627.370.500	108.172.480.360.000	0,02401912	94	3.812	0,61881756
28	3.812	72.057.594.037.927.900	1.609.341.595.560.000	0,0223341	85	3.727	0,62733093
30	3.727	1.152.921.504.606.850.000	24.061.445.010.950.400	0,02086998	78	3.649	0,63510853
32	3.649	18.446.744.073.709.600.000	361.297.635.242.552.000	0,01958598	71	3.577	0,64225528
34	3.577	295.147.905.179.353.000.000	5.445.717.990.022.690.000	0,01845081	66	3.511	0,64885596
36	3.511	4.722.366.482.869.650.000.000	82.358.080.713.306.100.000	0,01744	61	3.450	0,65497992
38	3.450	75.557.863.725.914.300.000.000	1.249.287.673.091.590.000.000	0,01653418	57	3.393	0,66068454
40	3.393	1.208.925.819.614.630.000.000.000	19.001.665.507.723.100.000.000	0,01571781	53	3.340	0,66601784

Bei vier möglichen Richtungen ergibt sich die Gesamtzahl der möglichen Wege mit 4^n. Die Anzahl der Wege, die davon wieder zum Ausgangspunkt zurückführen berechnet sich mit der erweiterten Formel für die Binomialverteilung, da wir es hier mit 4 Möglichkeiten zu tun haben.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \ x \ \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!\,n!}{\frac{n}{2}!\cdot\frac{n}{2}!\cdot\frac{n}{2}!\cdot\frac{n}{2}!}$$

wobei k = n/2, weil genauso viele Schritte in jede Richtung vorliegen müssen

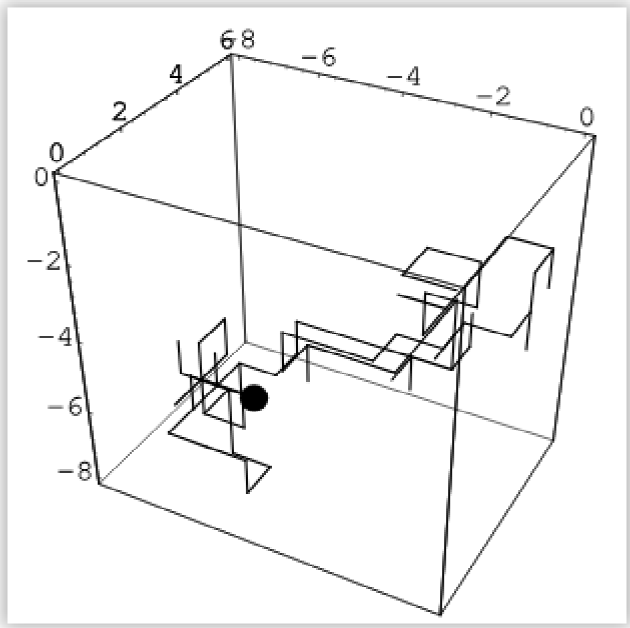
Eine gute Näherung für die Rückkehrwahrscheinlichkeit für n-Schritte erhält man mit der Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \, x \, \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\pi n}$$

Man erhält hier schon sehr bald riesige Zahlen, die jeden Taschenrechner und auch Computer vor Probleme stellen. Man erkennt aber auch hier, dass die Summe der Rückkehrwahrscheinlichkeiten mit zunehmender Weglänge immer größer wird und wohl gegen den Wert 1 tendiert.

C. Irrfahrt im 3- dimensionalen Raum

Einen 3-dimensionalen Raum bewegt man sich in sechs mögliche Richtungen: In die vier Himmelsrichtungen und zusätzlich nach oben und enten. Die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt beträgt 1/6 oder ungefähr 0,16666.



Polya konnte nachweisen, dass es für einen walk im 3-dimensionalen Raum keine sichere Rückkehrwahrscheinlichkeit gibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass man tatsächlich nach n – Schritten wieder auf dem Ausgangsfeld landet, tendiert gegen den Wert 0,340537. Damit ist es wahrscheinlicher, dass dir Rückkehr nicht gelingt und man irgendwo im Raum verschollen geht.

Der mathematische Nachweis dafür ist nicht einfach. Allerdings lassen sich die Einzel-wahrscheinlichkeiten, für die Rückkehr nach n – Schritten durch Erweiterung der obigen Formeln näherungsweise berechnen.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{(\pi n)^{\frac{3}{2}}}$$

Werden alle Wert aufsummiert, so sollte sich bei sehr großen Zahlen für n ein Grenzwert ergeben, der bei 0,34.. liegt.

Die Rückkehrwahrscheinlichkeit wird umso geringer, je größer die Anzahl der Dimensionen wird. (siehe Tabelle unten).

Die Erkenntnis, die man aus diesen Betrachtungen ziehen kann, lassen sich in folgender Aussage zusammenfassen.

A drunken man will get home ever, a drunken bird will get home never.

Ehrlicherweise bewege auch ich mich hier auf einer Irrfahrt. Ich habe bis jetzt keine an der Binomialverteilung angelehnte Formel gefunden, die errechnet, wie viele Wege nach n-Schritten wieder an den Ausgangspunkt zurück führen. Allerdings tendieren alle Versuche gegen einen Grenzwert, der deutlich unter 1 liegt. Bei zwei Schritten gibt es 6^2 = 36 Wege, von denen 6 Wege wieder zurück führen, bei 4 Schritten gibt es 6^4 = 1296 Wege, von denen 90 wieder zurück führen.

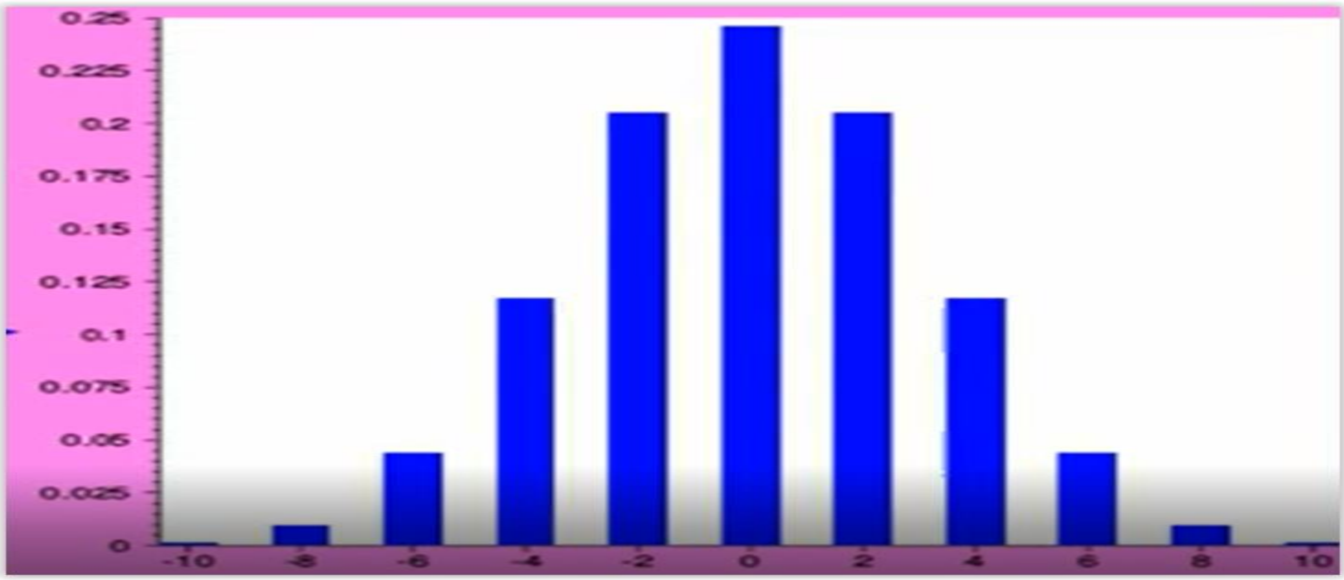
Eine genannte Formel lautet $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{6^n}$ für die Wahrscheinlichkeit der Rückkehr nach n – Schritten. Aber auch das scheint mir nicht unbedingt richtig zu sein.

Verteilung der Rückkehrwahrscheinlichkeiten

Betrachten wir einen 1-dimensionalen Walk entlang der x-Achse, beginnend bei 0. Nach 10 Schritten kann die gehende Person auf allen geradzahligen Werten zwischen -10 und 10 angekommen sein. Die Wahrscheinlichkeit der jeweiligen Endpunkte ist annähernd normalverteilt.

Die Wahrscheinlichkeit, auf einer bestimmten Koordinate zu landen kann mit folgender Formel berechnet werden:

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{n!}{\left(\frac{n+x}{2}\right)!\left(\frac{n-x}{2}\right)!}$ Wobei x der Zielwert auf der X-Achse ist. Be Rückkehr zum Ursprung ist x = 0



Verteilung der Endpunkte für d = 1 und n = 10

Das Integral unter der Verteilung muss für d = 1 und d = 2 den Wert 1 ergeben. Für höhere Dimensionen wird die Verteilung ähnlich aussehen, aber bei d = 3 kann das Integral maximal den Wert von ca. 0,34 ergeben (Siehe Tabelle unten).

Die Tabelle zeigt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei unterschiedlichen Dimensionen nach einer unendlichen Zahl von Schritten wieder zum Startpunkt zurückzukehren. Bei Wanderungen im ein- oder zweidimensionalen Raum kehrt man sicher irgendwann zurück, ab der dritten Dimension nimmt die Rückkehrwahrscheinlichkeit deutlich ab.

Rückkehrwahrscheinlichkeiten	
Dimension d	Rückkehrwahrscheinlichkeit zum Start
1	1
2	1
3	0,340537
4	0,193206
5	0,135178

Polya war nicht nur Mathematiker und Hochschullehrer, sondern befasste sich auch mit Philosophie. Bekannt ist ebenfalls seine Abhandlungen zur Schule des Denkens und seine Anleitung zur Lösungsstrategie von mathematischen Problemen.

Anleitungstabelle nach G. Polya, ”Schule des Denkens“:

In vier Schritten zur Lösung mathematischer Aufgaben (in jedem Schritt verfolgt man auch die drei Fragen: Wo soll ich beginnen? Was kann ich tun? Was kann ich erreichen?)

1. Schritt: Verstehen der Aufgabe/Analyse

(a) Analyse der Daten der Aufgabe: Was ist unbekannt/gesucht? Was ist gegeben? Wie lautet die Voraussetzung? Was ist die Behauptung?
(b) Lösbarkeit der Aufgabe: Ist die Voraussetzung erfüllbar? Reicht die Voraussetzung zur Lösung der Aufgabe/Bestimmung der Unbekannten? Ist die Voraussetzung unzureichend/überbestimmt/kontradiktorisch? Ist die Aufgabe sinnvoll/richtig gestellt?
(c) Anschauung: Mache eine Skizze, führe passende Bezeichnungen ein.
(d) Teile der Aufgabe analysieren: Trenne verschiedene Teile der Voraussetzung und Behauptung, kannst Du sie hinschreiben oder anders formulieren?

2. Schritt: Ausdenken eines Plans/Erarbeiten einer Lösungsstrategie

Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten/der zu zeigenden Behauptung. Untersuche Hilfsaussagen/bekannte Resultate aus früheren Übungen/der Vorlesung, wenn nicht ein unmittelbarer Zusammenhang gefunden werden kann. Ziel ist es, einen Plan zur Lösung der Aufgabe zu erhalten. Prüfe Deine Vermutung(en)!
(a) Hast Du die Aufgabe so oder ähnlich schon einmal gesehen? Suche nach Mustern/Regelmäßigkeiten in der Aufgabe.
(b) Kennst Du eine verwandte Aufgabe oder einen Satz (etwa aus der Vorlesung), der helfen könnte?
(c) Betrachte die Unbekannte/die zu zeigende Behauptung. Kennst Du Aufgaben mit ähnlicher Unbekannten/Behauptung? Kannst Du diese bzw. ihr Ergebnis verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Kannst Du ein Hilfselement einführen, so dass das frühere Resultat verwendbar wird?
(d) Kannst Du die Aussage der Behauptung anders ausdrücken? Gehe auf die Definition(en) zurück.
(e) Versuche, eine verwandte Aufgabe zu lösen, kannst du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken, etwa durch Änderung der Voraussetzung oder der Behauptung? Allgemeiner oder spezieller? Oder analog? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Kannst Du die Aufgabe nach Veränderung der Voraussetzung oder Behauptung lösen?
(f) Werden alle Daten/die ganze Voraussetzung/alle vorkommenden Begriffe benutzt?

3. Schritt: Ausführen des Plans (Synthese)

Kontrolliere bei der Ausführung jeden Schritt auf Richtigkeit. Kannst Du beweisen, dass jeder Schritt richtig ist?

4. Schritt: Rückschau/Prüfung/Vertiefung

(a) Kannst Du das Resultat/den Beweis überprüfen? Etwa durch Einsetzen spezieller Zahlen usw. checken, ob es stimmt?
(b) Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Es können viele Wege zum Ziel führen!
(c) Kannst Du das Resultat/die Methode für irgendeine andere/spätere Aufgabe gebrauchen? Welches neue Wissen ergibt sich? Sollte man sich das Resultat/die Methode für später merken? Kann man so neue mathematische Aufgaben erfinden? Stimmt die Umkehrung? Oder eine Verallgemeinerung?